Exercice1 :

Déterminer la limite des suites de terme général : $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $b_n = \frac{\sin n - 2n}{n+1}$.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$, par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n+\sqrt{0}} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} .$$

a) En remarquant que les $n+1$ termes constituant la somme u_n sont tous compris entre $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{n}$, démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Corrigé exercice 2

▸ Solution **a)** Pour $n \geq 1$ et pour $0 \leq k \leq n$, on a $0 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ puis $n \leq n+\sqrt{k} \leq n+\sqrt{n}$ et, par inversion $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \dfrac{1}{n}$ donc chacun des $n+1$ termes de la somme constituant u_n est supérieur à $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ d'où $u_n \geq (n+1) \times \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ et inférieur à $\dfrac{1}{n}$ d'où $u_n \leq (n+1) \times \dfrac{1}{n}$.

Finalement pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \dfrac{n+1}{n}$.

b) D'une part $\dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ puis par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} = 1$.

D'autre part $\dfrac{n+1}{n} = 1+\dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 1$.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit la convergence de (u_n) vers 1.